文章编号：1007-4627(2023) 000000-07

相对论框架下缪氢原子兰姆位移的高精度计算

陈京萱[1,2,3]，林渠铖[4]，岳鼎[5]，马钰卓[5]，吴迁[2]，陈旭荣[2,3]，王倩[1,6,7]

(1. 华南师范大学量子物质研究院，原子亚原子结构与量子调控教育部重点实验室，广州，510006；
2. 中国科学院近代物理研究所，兰州，730000；
3. 中国科学院大学核科学与技术学院，北京，100049；
4. 新疆大学物理科学与技术学院，乌鲁木齐，830000；
5. 兰州大学核科学与技术学院，兰州，730000；
6. 华南师范大学量子物质研究院，广东省核物质科学与技术重点实验室，广州，510006；
7. 华南师范大学南方核科学计算中心，粤港量子物质联合实验室，广州，510006)

摘要：对缪氢原子兰姆位移的测量是测量质子电荷半径的最有效手段之一，而对于缪氢原子兰姆位移的理论计算则是从兰姆位移的实验结果中抽取出质子电荷半径的必要途径。本文计算了缪氢原子的兰姆位移，考虑了相对论效应对缪氢原子兰姆位移的影响。由真空极化效应导致的兰姆位移由 Uehling 等效势能来表征，缪氢原子的相对论效应通过 Breit-Pauhli 哈密顿量来表达；本文通过精确的少体计算方法-高斯展开法，计算了缪氢原子的 $2S_{1/2}$ 与 $2P_{1/2}$ 的能级，发现考虑了相对论修正后的兰姆位移比不考虑相对论修正的兰姆位移大 0.09 meV，且更接近实验结果。

关键词：缪子氢原子，兰姆位移，高斯展开法

中图分类号：　　**文献标志码：**　　**DOI：**10.11804/NuclPhysRev.00.01.00

引言

氢原子是自然界最轻的原子，是一个由电子和质子组成的系统。尽管是构成最简单的原子，但是对其原子光谱的探索却直接派生出了现代物理学的两大支柱之一的量子力学。在玻尔理论成功描述了氢原子系统（玻尔能级）之后，人们通过计算薛定谔方程可以精确求解氢原子波函数。然而，在后续实验中发现氢原子光谱中红色谱线是一个紧密间隔的双峰，这种分裂被称为精细结构，是电子自旋和轨道角动量耦合导致的，这是电子自旋存在的早期实验证据。为了理解该现象，狄拉克于 1928 年提出了 Dirac 方程。Dirac 方程是一个四分量波函数的方程，描述了自旋 1/2 粒子的运动，同时考虑了相对论效应和量子力学效应，成功解释了电子自旋现象。但是 Dirac 方程计算出的氢原子 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态是简并的，这与兰姆等人在实验中发现 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态存在一定的能级差的事实相悖[1]，人们将 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 之间的能级差称为兰姆位移。后来随着量子电动力学（QED）的发展，兰姆位移才得到解释[2]，其被解释为电子与电磁场的真空波动相互作用而产生的现象。

缪氢原子是一个由负缪子和质子组成的系统，其寿命由缪子的衰变时间 $\tau_\mu = 2.19703(4)\times10^{-6}s$ 决定。因为缪子的质量大约是电子质量的 200 倍，所以其基态的结合能约为氢原子基态结合能的 200 倍，27 keV 左右，对应的缪氢原子的玻尔半径也大约为氢原子的 1/200，即 265 fm 左右。同时，缪子波函数受质子的影响大约是电子波函数受质子影响的 $(m_\mu/m_e)^3 \approx 10^7$ 倍[3]。不同于氢原子，由于缪氢原子的玻尔半径更小，以及缪子质量远大于电子质量且与质子质量更为接近，因此缪氢原子的能级受质子缪子反冲效应[4]，正负电子真空极化效应[5-6] 和核子结构与电荷分布[7-9] 等效应的影响更大。值得一提的是，众多的关于缪子氢原子兰姆位移的研究表明[3,10-14]，真空极化效应承担了缪子氢原子的兰姆位移约 99% 的贡献，而与之有很大不同的是，真空极化效应对氢原子兰姆位移的贡献比例很小[3]。

除了真空极化效应之外，由于上文提及缪子波函数受质子的影响约为电子波函数在氢原子中所受影响的 $(m_\mu/m_e)^3 \approx 10^7$ 倍，因此质子的电荷半径也对缪氢原子的兰姆位移有约为 1 兆赫兹量级的影响。从文献[15-16] 中可以看出，缪氢原子的兰姆位移受真空极化的影响最大，

收稿日期：2023-10-07；　修改日期：2023-10-07
基金项目：广东省基础与应用基础研究重大项目 2020B0301030008，中国科学院战略先导研究项目 XDB3403030
作者简介：陈京萱（1999-），性别女，天津市，硕士研究生；E-mail: jingxuanchen@impcas.ac.cn
通信作者：E-mail: xchen@impcas.ac.cn
通信作者：E-mail: qianwang@m.scnu.edu.cn

除此之外，显著影响缪氢原子兰姆位移的是质子的电荷半径。因此，结合理论上给出的缪子氢原子兰姆位移与质子电荷半径的关系[17-18]，可以通过实验测量缪氢原子 $2S_{1/2}-2P_{1/2}$ 兰姆位移来准确的给出质子的电荷半径。[19] 在相关的缪子氢原子的实验中，其给出的质子电荷半径为 0.84184 ± 0.00067 fm[20-21]。但是，另一方面，质子的电荷半径还有另外两种较为常见的测量方法，即利用电子质子弹性散射[22-23] 或氢原子兰姆位移[24-26]。然而，这两种测量方法在不同的实验中给出质子电荷半径呈现出较大的差异；2010 的电子质子散射实验与 2018 年的氢原子能谱测量实验[23,26] 给出的质子电荷半径都在 0.87 到 0.88 fm 之间，而 2019 年熊伟志等人完成的电子质子散射实验[22] 与 2019 年 Bezginov 等人[25] 完成的氢原子能谱实验给出的质子电荷半径分别为 0.831 ± 0.019 fm 与 0.833 ± 0.010 fm。尽管最新的电子质子实验给出的质子电荷半径更为接近缪子氢原子给出的质子电荷半径值，但是关于质子电荷半径的一系列理论与实验研究仍需进行。

考虑到缪氢原子兰姆位移在质子电荷半径测量中的重要性，也为了更好的研究缪子氢原子的能谱，精确计算缪子氢原子的兰姆位移势在必行。本文着重考虑了相对论修正与真空极化效应对缪氢原子 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态能级的影响。需要指出的是，相对论效应中包含了缪子质子约化质量的影响，真空极化效应则通过 Uehling 等效势能来表征。通过高斯展开法[27]，计算上述两种效应对缪子氢原子 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级的影响，并将结果与一阶微扰的计算结果进行对比。

本文具体内容如下，第二节给出了描述氢原子系统的薛定谔方程，非相对论近似的狄拉克方程和描述缪子氢原子系统的相对论性方程，最后给出了缪子氢原子的兰姆位移的等效势。第三节详细介绍了高斯展开法以及具体计算中所需的一系列矩阵元的推导。第四节是计算结果，首先展示了氢原子的计算结果，旨在测试高斯展开法的精确度；然后给出了缪氢原子兰姆位移相关的一系列结果。最后一节给出了本文的结论。

1 氢原子与缪氢原子系统哈密顿量

1.1 氢原子系统

氢原子是一个由电子和质子组成的二体系统，电子质量为 $m_e=0.5110\,\mathrm{MeV}$，质子质量约为电子质量的 1800 倍，远远大于电子质量。所以氢原子系统的薛定谔方程可以简化成电子在质子的库伦引力势场中的单体运动方程，此时氢原子的薛定谔方程如下：

$$\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r}\right)\Psi=E\Psi \tag{1}$$

Ψ 即为电子的波函数，m 为电子与质子的约化质量（$m\approx m_e$）。

在氢原子中，非相对论极限的狄拉克方程如下：

$$\left[\frac{p^2}{2m}-\frac{\alpha}{r}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\frac{e^2}{2m^2c^2r^3}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{l}) +\frac{\pi\hbar^2e^2}{2m^2c^2}\delta(\boldsymbol{r})\right]\Psi=E'\Psi. \tag{2}$$

其中除了和方程 (1) 中共有的动能项和库伦势之外，另外包括三项相对论修正，分别为动能的一阶相对论修正，自旋轨道耦合项以及 Darwin 项。自旋轨道耦合项只对轨道角动量 $l\neq0$ 的态有修正，而 Darwin 项，又称作接触势，只对 $l=0$ 的态有修正。

1.2 缪氢原子系统

缪氢原子由负缪子和质子组成，可以理解为将氢原子系统中的电子改换为负缪子。负缪粒子带一个单位负电荷，自旋为 $\frac{1}{2}$，这些性质与电子是相同的。不同之处在于 μ 子质量为 105.6584 MeV，约为电子质量的 200 倍，这导致缪氢原子的玻尔半径 $\hbar/(m_\mu c\alpha)$ 要比氢原子小大约 200 倍。

对于缪氢原子系统，如果简单地将电子质量换为缪子质量（$m_e\to m_\mu$）利用 Dirac 方程计算缪氢原子能级是不恰当的，因为缪子质量与质子质量更为接近，缪氢原子的相对论性方程需要考虑缪子质子的约化质量修正，因此应该使用两体 Breit-Pauli 哈密顿量[3]。本文只使用了 Breit-Pauli 哈密顿量的部分项，具体如下：

$$\begin{aligned}H=&\frac{\mathbf{p}^2}{2m_{\mu p}}-\frac{\alpha}{r}-\frac{\mathbf{p}^4}{8m_\mu^3}-\frac{\mathbf{p}^4}{8m_p^3}\\&+\frac{\pi\alpha}{2}\times\left(\frac{4\langle \mathrm{r}^2{}_{\mathrm{p}}\rangle}{3}+\frac{1}{m_\mu^2}+\frac{1}{m_p^2}\right)\delta(r)\\&+\frac{\alpha}{4m_\mu pr^3}\left(1+\frac{2m_\mu}{m_p}\right)(\mathbf{L}\sigma_1).\end{aligned} \tag{3}$$

其中，$m_{\mu p}$ 是缪子和质子的约化质量，m_μ 是缪子质量，m_p 是质子质量，σ_1 是缪子的自旋。同方程（2）相比，其额外考虑了质子质量与质子半径带来的修正。

1.3 兰姆位移

兰姆位移是 $2S_{1/2}-2P_{1/2}$ 的能级差，对于氢原子系统，对兰姆位移的最大贡献是电子的真空自能；而对于缪氢原子系统，单圈真空极化约贡献了 99% 的兰姆位移，本文使用 Yukawa 势作为单圈真空极化的等效势能[28]：

$$V_U(r)=-\lambda e^{-\beta r}/r. \tag{4}$$

其中 $\beta=9.3137\times10^{-3}\ \mathrm{fm}^{-1}$，$\lambda=2.9533\times10^{-3}$ MeV.

2 高斯展开法

为了求解两体薛定谔方程:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r)-E\right]\psi_{lm}(\mathbf{r})=0. \quad (5)$$

我们将 $\psi_{lm}(r)$ 展开成一系列高斯型试探基函数之和[27]:

$$\psi_{lm}(\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{n_{\max}}c_{nl}\phi^G_{nlm}(\mathbf{r}),$$
$$\phi^{\mathrm{G}}_{nlm}(\mathbf{r})=\left(\frac{2^{l+2}\left(2\nu_n\right)^{l+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!}\right)^{\frac{1}{2}}r^l e^{-\nu_n r_n^2}Y_{lm}(\mathbf{r}). \quad (6)$$

这里将高斯参数 $\nu_n=1/r_n^2$ 选取为一系列成等比关系的数:

$$r_n=r_{\min}a^{n-1},\quad (n=1\sim n^{\max}). \quad (7)$$

最后，利用 Rayleigh-Ritz 变分法求解如下方程:

$$\sum_{n'=1}^{n^{\max}}\left[T_{nn'}+V_{nn'}-EN_{nn'}\right]c_{n'l}=0. \quad (8)$$

同样，Dirac 方程利用矩阵元可以表示为

$$\sum_{n'=1}^{n_{\max}}\left[T_{nn'}+V_{nn'}-R_{nn'}\right.$$
$$\left.+S_{nn'}+D_{nn'}-EN_{nn'}\right]c_{n'l}=0, \quad (9)$$
$$\left(n=1-n_{\max}\right).$$

其中 $T_{nn'}$ 是动能项的矩阵元，$V_{nn'}$ 代表库伦势的矩阵元，$R_{nn'}$ 是动能相对论修正项的矩阵元，$S_{nn'}$ 是自旋轨道耦合项的矩阵元，$D_{nn'}$ 代表 Darwin 项的矩阵元。具体矩阵元表示为:

$$N_{n,n'}=\langle\phi^G_{nlm}\mid\phi^G_{n'lm}\rangle=\left(\frac{2\sqrt{\nu_n\nu_{n'}}}{\nu_n+\nu_{n'}}\right)^{l+\frac{3}{2}}, \quad (10)$$

$$T_{n,n'}=\left\langle\phi^G_{nlm}\left|-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right|\phi^G_{n'lm}\right\rangle=\frac{\hbar^2}{m}\frac{(2l+3)\nu_n\nu_{n'}}{\nu_n+\nu_{n'}}N_{n,n'}, \quad (11)$$

$$V_{n,n'}=\left\langle\phi^G_{nlm}\left|\frac{1}{r}\right|\phi^G_{n'lm}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{l+1}l!}{(2l+1)!!}\sqrt{\nu_n+\nu_{n'}}N_{n,n'}, \quad (12)$$

$$R_{n,n'}=\left\langle\phi^G_{nlm}\left|\frac{p^4}{8m^3c^2}\right|\phi^G_{n'lm}\right\rangle=\frac{\hbar^4}{m^3}(2l+3)(2l+5)\left(\frac{\nu_n\nu_{n'}}{\nu_n+\nu_{n'}}\right)^2N_{n,n'}, \quad (13)$$

$$S_{n,n'}=\left\langle\phi^a_{n\ell m}\left|\frac{e^2}{2m^2r^3}\right|\phi^G_{n'lm}\right\rangle=\frac{e^2}{2m^2}\frac{2^{l+1}(l-1)!}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!}\left(\nu_n+\nu_{n'}\right)^{\frac{3}{2}}N_{n,n'}, \quad (14)$$

$$D_{n,n'}=\left\langle\phi^G_{n\ell m}\left|\frac{\pi\hbar^2e^2}{2m^2c^2}\delta(r)\right|\phi^G_{n'lm}\right\rangle=\frac{e^2}{2m\sqrt{\pi}}\left(\nu_n+\nu_{n'}\right)^{\frac{3}{2}}N_{n,n'}. \quad (15)$$

3 结果与讨论

3.1 氢原子

首先，通过计算氢原子能级，并将其计算结果同精确解进行对比，来验证高斯展开法的精确性（见表 1）。对于基态，高斯展开法的计算结果与精确解在小数点后第 12 位才开始有差别；而对于 2P 态，其在小数点后 15 位才有差别，误差只有 $10^{-14}\sim\times10^{-15}$ eV。接下来，通过求解非相对论极限下 Dirac 方程（2）来获得氢原子 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态结合能，并将其结果与一阶微扰的结果进行对比（见表 2），结果表明，对于 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{1/2}$ 态，完全对角化给出的结果与一阶微扰计算出的结果在小数点后第 9 位产生差别。

表 2展示了方程（2）中 Dirac 方程修正项的期望值。动能修正项（R）对于氢原子能级的影响只由波函数贡献，所以有 $E_R(2S_{1/2})>E_R(2P_{1/2})$，Darwin 项 (D) 只对角动量为零的 s 波有影响，使得 $2S_{1/2}$ 能级上移。同时自旋轨道耦合项（S）只对非 S 态有影响且与总角动量的值相关，会使得 $2P_{1/2}$ 态能级下移。

本小节的计算表明高斯展开法可以用来计算研究非相对论与相对论效应下的氢原子能级，能够可靠的区分出各种效应下的氢原子能级的微小变化。

表 1 氢原子 1S、2S 与 2P 能级的精确解与高斯展开法的计算结果。（原子单位制）

	精确值	GEM 计算结果
$1S$	-0.5000000000000000	-0.499999999992102
$2S$	-0.1250000000000000	-0.124999999999033
$2P$	-0.1250000000000000	-0.125000000000005

表 2 非相对论极限下狄拉克方程给出的氢原子 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{1/2}$ 态的计算结果。（原子单位制）

	$2S_{1/2}$	$2P_{1/2}$
非微扰	-0.1250020841	-0.1250020814
一阶微扰	-0.1250020812	-0.1250020812
R	0.0000054097	0.0000009712
D	0.0000033285	0
S	0	-0.0000011100

3.2 缪氢原子的兰姆位移

本节对缪氢原子进行了一系列的计算。前文提到, 相比氢原子，由于缪子的质量远远大于电子，缪氢原子系统的玻尔半径大约是氢原子的 1/200。表 3中给出缪氢原子玻尔半径的计算结果为 285.7 fm, 相比氢原子的 52918 fm 小了约 200 倍；表 3的三四栏为缪氢原子与氢原子的基态与第一激发态的能级，可以看出缪氢原子的束缚能普遍比氢原子同样能级的束缚能大 200 倍左右。

表 3　只考虑库伦势的情况下缪氢原子与氢原子玻尔半径，基态能量与第一激发态能量的对比。

	玻尔半径 [fm]	基态 [eV]	第一激发态 [eV]
氢原子	52918.74	-13.61	-3.39
缪氢原子	285.71	-2528.85	-632.21

接下来，通过求解方程 (3) 来获得缪氢原子的 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态的能级。如果只考虑缪子和质子间库伦势，即使用方程 (1) 来求解缪氢原子，所得到的 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态的能级在 10^{-3} meV 的量级也是完全一样的（见表 4第二列)，而在考虑了相对论修正后（包含质子半径以及质子缪子约化质量修正)，求解 Breit 哈密顿量得出了新的缪氢原子的 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态的能级（见表 4第三列)。发现 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态的能级仍然接近但是有微小的差别，且分别与只考虑库伦势时的能级产生了约 0.023 meV 的偏移。

表 4　缪氢原子 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 态的能级。单位为电子伏特 (eV)。

	库伦势	Breit
$2S_{1/2}$	-632.2119203	-632.2343889
$2P_{1/2}$	-632.2119204	-632.2343674

尽管在考虑了相对论修正后，$2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态的能级产生了大约 0.02 个 meV 的差别，但是与实验值 206.2949 meV[20] 仍然不在同一个量级，且理论上相对论效应并不会导致兰姆位移。因此在缪氢原子中，为了计算 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{1/2}$ 态的能级劈裂, 我们使用 Uehling 势能的 Yukawa 近似的形式。首先, 仅使用库伦势和 Uehling 势能来计算兰姆位移, 其结果在表 5第二行, 计算出的兰姆位移为 205.2132 meV，并与一阶微扰的结果进行对比 (表 5第三行), 发现一阶微扰计算出的兰姆位移要比全对角化计算的结果约小 0.12 meV。最后同时考虑 Breit 哈密顿量与 Uehling 势能, 全对角化后的计算结果在表 5第四行，此时，与仅仅考虑库伦势时相比，兰姆位移的计算值产生了约 0.09 meV 的偏移。此偏移产生的原因如下：尽管 Breit 哈密顿量中除了库伦势以外的项对 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态带来的影响相比库伦势项是很小的，但是很明显两种情况下波函数是不一致的，波函数变化带来的影响会接着影响 Uehling 势能的计算结果。同时，与只考虑库伦势时的一阶微扰计算结果类似，考虑 Breit 哈密顿量时的一阶微扰计算结果同样也比非微扰的计算结果低 0.12 meV 左右。综上，使用高斯展开法的非微扰计算以及考虑相对论修正后兰姆位移的计算结果，205.2970 meV，更加接近实验结果。图 1中直观的展示了缪氢原子在只考虑库伦势，考虑相对论效应以及加上 Uehling 势能之后的基态与第一激发态的能级。

最后，我们研究相对论效应对质子半径的影响。在引言中提及了可以通过实验测量缪氢原子的兰姆位移的能级劈裂来间接的获得质子的电荷半径。由于理论计算值同实验值之间存在 5.0σ 的差异，为了弥补这一差异，往往会通过计算缪氢原子 $2S_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的能级差值 ($\Delta(2S_{1/2}-2P_{3/2})$) 来获得质子电荷半径[15-16]。$2S_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的能级差 99% 左右都是由缪氢原子的兰姆位移贡献，剩下部分则由 $2S_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的超精细结构劈裂，$2P_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的精细结构劈裂贡献，以及质子电荷半径相关项[15-16,29-30]：

$$E_p=\left(-5.2262\frac{r_p^2}{\mathrm{fm}^2}+0.0347\frac{r_p^3}{\mathrm{fm}^3}\right)\mathrm{meV} \qquad (16)$$

所贡献。其中 $2S_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的超精细结构劈裂以及 $2P_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的精细结构劈裂都是由 Breit-Pauli 哈密顿量所贡献。

为了研究相对论效应下兰姆位移的变化对质子电荷半径的影响, 计算了两种情况下的 $\Delta(2S_{1/2}-2P_{3/2})$。情况一，将 Breit 哈密顿量给出的 $2S_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的超精细结构劈裂与 $2P_{1/2}$态 与 $2P_{3/2}$ 态的精细结构劈裂的单独提取出，再加上仅仅考虑库伦势时的兰姆位移；情况二，直接计算 Breit 哈密顿量加 Uehling 势能下的 $\Delta(2S_{1/2}-2P_{3/2})$ 值。两种情况的比较在表 6的第二列展示。可以看出这两种情况的 $\Delta(2S_{1/2}-2P_{3/2})$ 的差值与表 5中第二行与第四行的兰姆位移的差值几乎一样。然后，将两种情况下计算出的 $\Delta(2S_{1/2}-2P_{3/2})$ 值分别与实验测量出的 $\Delta(2S_{1/2}-2P_{3/2})$ 值 (206.2949 meV) [20] 对比, 不同的部分由式 16中的质子电荷半径相关项贡献，即可以计算出两种情况下质子的电荷半径，具体结果在表 6的最后一列，可以看出相对论效应下兰姆位移的变化会导致质子的电荷半径产生约 0.01 fm 的差别。考虑到目前一系列缪氢原子能级实验给出的质子电荷半径在 0.84 fm 左右，而电子质子散射实验给出的质子电荷半径则在 0.87 fm 左右。因此，相对论效应与对兰姆位移的影响是需要考虑的，其有可能为解决两类实验中质子电荷半径差异的问题带来一些思路。

表 5 Uehling 势能对缪氢原子 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{1/2}$ 态能级的修正, 以及兰姆位移的计算结果，单位为毫电子伏特（meV）。

	$\Delta 2S_{1/2}$	$\Delta 2P_{1/2}$	$\Delta 2P_{1/2} - \Delta 2S_{1/2}$
库伦势	-219.8001	-14.5869	205.2132
库伦势 (一阶微扰)	-219.6793	-14.5842	205.0952
Breit	-219.8878	-14.5908	205.2970
Breit(一阶微扰)	-219.7670	-14.5880	205.1790
实验结果			206.2949

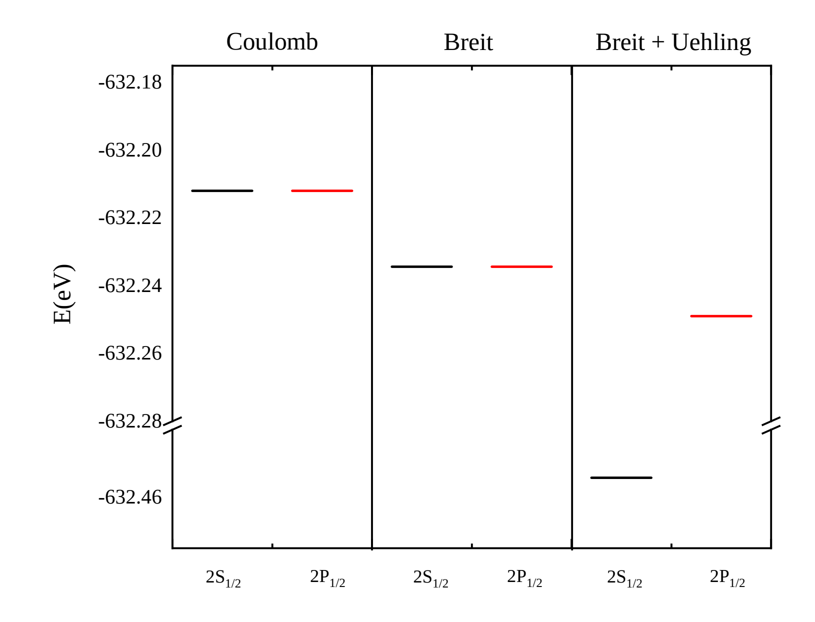


图 1 缪氢原子部分能级图。

表 6 缪氢原子 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{3/2}$ 态的能级差 (单位: 毫电子伏特) 以及对应的质子电荷半径 r_p(单位:fm)。

	$\Delta(2S_{1/2} - 2P_{3/2})$	r_p
情况一	209.9887	0.8431
情况二	210.0778	0.8532

4 结论

本文首次利用高斯展开法计算了相对论框架下的缪氢原子部分能级以及缪氢原子的兰姆位移，对于氢原子和缪氢原子的相对论修正，分别使用了非相对论极限下的狄拉克方程与 Breit-Pauli 方程。而缪氢原子的兰姆位移用描述了真空极化的 Uehling 势能作为其等效势。

首先，对于氢原子系统，本文分别求解了薛定谔方程与非相对论极限下的狄拉克方程，并将薛定谔方程的计算结果与精确解进行了对比、将非相对论极限下狄拉克方程的计算结果与一阶微扰的结果进行对比，结果表明高斯展开法的精确度在 10^{-9}eV 量级。

接下来，分别通过求解薛定谔方程与 Breit-Pauli 方程来获得缪氢原子能级，与使用薛定谔方程相比，Breit 方程对 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{1/2}$ 态造成了大约 0.02 meV 的差异；同时，与只考虑库伦势的情况对比之后发现，其对 $2S_{1/2}$ 态与 $2P_{1/2}$ 态本身都产生了约 0.023 eV 的差别。

最后求解了薛定谔方程加 Uehling 势能与 Breit-Pauli 方程加 Uehling 势能下的兰姆位移，结果表明后者计算出的兰姆位移比前者高了约 0.09 meV，也更接近实验结果。另一方面，如果把 Uehling 势能看成微扰项并计算一阶微扰下兰姆位移，其结果比非微扰的计算结果低 0.12 meV，即更偏离实验结果。在此基础上，利用公式 16计算了两种情况下的质子电荷半径，发现相对论修正导致的这一 0.09 meV 的偏移会对质子电荷半径带来约 0.01 fm 的变化，此变化在目前一系列质子电荷半径的测量实验中是不可忽视的。因此，在兰姆位移的这样对精确度要求很高的计算中，不宜使用一阶微扰来进行计算。同时在缪氢原子中，考虑相对论修正是必要的，其对波函数的影响进而会对兰姆位移产生影响，且考虑相对论修正后的计算结果更接近实验值，此结论对后续的缪氢原子的相关计算有重要的参考价值。此外，由于本文只考虑了单圈真空极化对于兰姆位移的贡献，但是

还有双圈真空极化、缪子自能修正等[15-16,20] 都会对兰姆位移产生大于 0.09 meV 的影响，如果利用 Breit-Pauli 方程加上这些修正项进行计算，也许会抵消或者增大这一 0.09 meV 的差异，进而对质子电荷半径产生影响。后续会基于此进行进一步的研究计算。高精度测量是目前粒子物理学重要的实验前沿之一，本文对缪氢原子兰姆位移的计算将为缪子物理的高精度测量实验提供重要的理论参考。

参考文献

[1] BETHE H A, BROWN L M, STEHN J R. Phys Rev, 1950, 77: 370. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.77.370.

[2] GREINER W, REINHARDT J. Quantum electrodynamics[M]. Quantum Electrodynamics, 1994.

[3] MARTYNENKO A P. Phys Atom Nucl, 2008, 71: 125. DOI: 10.1007/s11450-008-1014-y.

[4] BARKER W A, GLOVER F N. Phys Rev, 1955, 99: 317. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.99.317.

[5] UEHLING E A. Phys Rev, 1935, 48: 55. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.55.

[6] SERBER R. Phys Rev, 1935, 48: 49. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.49.

[7] FRIAR J, SICK I. Phys Lett B, 2004, 579(3): 285. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269303017416. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.11.018.

[8] ROSENFELDER R. Phys Lett B, 1999, 463(2): 317. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399009375. DOI: https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00937-5.

[9] PACHUCKI K. Phys Rev A, 1999, 60: 3593. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.3593.

[10] BORIE E, RINKER G A. Rev Mod Phys, 1982, 54: 67. DOI: 10.1103/RevModPhys.54.67.

[11] DRAKE G W F, BYER L L. Phys Rev A, 1985, 32: 713. DOI: 10.1103/PhysRevA.32.713.

[12] PACHUCKI K, LEIBFIRED D, WEITZ M, et al. J Phys B, 1996, 29: 177.

[13] PACHUCKI K. Phys Rev A, 1996, 53: 2092. DOI: 10.1103/PhysRevA.53.2092.

[14] BORIE E. Annals Phys, 2012, 327: 733. DOI: 10.1016/j.aop.2011.11.017.

[15] JENTSCHURA U D. Annals Phys, 2011, 326: 500. DOI: 10.1016/j.aop.2010.11.012.

[16] JENTSCHURA U D. Annals Phys, 2011, 326: 516. DOI: 10.1016/j.aop.2010.11.011.

[17] CARLSON C E, VANDERHAEGHEN M. Phys Rev A, 2011, 84: 020102. DOI: 10.1103/PhysRevA.84.020102.

[18] GORCHTEIN M, LLANES-ESTRADA F J, SZCZEPANIAK A P. Phys Rev A, 2013, 87(5): 052501. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.052501.

[19] POHL R, GILMAN R, MILLER G A, et al. Ann Rev Nucl Part Sci, 2013, 63: 175. DOI: 10.1146/annurev-nucl-102212-170627.

[20] POHL R, ANTOGNINI A, NEZ F, et al. nature, 2010, 466(7303): 213.

[21] ANTOGNINI A, NEZ F, SCHUHMANN K, et al. Science, 2013, 339 (6118): 417.

[22] XIONG W, GASPARIAN A, GAO H, et al. Nature, 2019, 575(7781): 147.

[23] BERNAUER J C, COLLABORATION A. High-precision determination of the electric and magnetic form factors of the proton[C]//AIP Conference Proceedings: volume 1388. American Institute of Physics, 2011: 128.

[24] MARTYNENKO A, FAUSTOV R. Physics of Atomic Nuclei, 2000, 63: 845.

[25] BEZGINOV N, VALDEZ T, HORBATSCH M, et al. Science, 2019, 365(6457): 1007.

[26] FLEURBAEY H, GALTIER S, THOMAS S, et al. Phys Rev Lett, 2018, 120(18): 183001.

[27] HIYAMA E, KINO Y, KAMIMURA M. Prog Part Nucl Phys, 2003, 51: 223. DOI: 10.1016/S0146-6410(03)90015-9.

[28] KARR J P, HILICO L. Phys Rev Lett, 2012, 109: 103401. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.103401.

[29] ANTOGNINI A, KOTTMANN F, BIRABEN F, et al. Annals Phys, 2013, 331: 127. DOI: 10.1016/j.aop.2012.12.003.

[30] CARLSON C E, NAZARYAN V, GRIFFIOEN K. Phys Rev A, 2011, 83: 042509. DOI: 10.1103/PhysRevA.83.042509.

High precision computation of the Lamb shift of the muonic hydrogen atom within the relativistic framework

Jingxuan Chen[1, 2, 3], Qucheng Lin[4], Ding Yue[5], Yuzhuo Ma[5], Qian Wu[2], Xurong Chen[2, 3], Qian Wang[1, 6, 7]

(*1. Key Laboratory of Atomic and Subatomic Structure and Quantum Control (MOE), Institute of Quantum Matter, South China Normal University, Guangzhou 510006, China;*

2. Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China;

3. School of Nuclear Science and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

4. College of Physics, Science, and Technology, Xinjiang University, Urumqi 830000, China;

5. School of Nuclear Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;

6. Guangdong Provincial Key Laboratory of Nuclear Science, Institute of Quantum Matter, South China Normal University, Guangzhou 510006, China;

7. Guangdong-Hong Kong Joint Laboratory of Quantum Matter, Southern Nuclear Science Computing Center, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The measurement of the muonic hydrogen atom Lamb shift is one of the most fundamental ways to obtain the proton charge radius experimentally. The theoretical calculation of the muonic hydrogen atom Lamb shift is necessary to extract the proton charge radius from the Lamb shift. In this work, we calculate the muonic hydrogen atom Lamb shift within the relativistic framework. The relativistic effect is described with the Breit-Pauli hamiltonian. The vacuum polarization effect is realized with the effective Uehling potential. With a high precision calculational method, Gaussian expansion method, we calculate the $2S_{1/2}$ and $2P_{1/2}$ levels of the muonic hydrogen atom. We find that the muonic hydrogen atom Lamb shift with considering the relativistic effect is about 0.09 meV larger than the one without considering the relativistic effect and the former one is closer to the experimental value.

Key words: muonic hydrogen; lamb shift; Gaussian expansion method

Received date: 07 Oct. 2023; **Revised date:** 07 Oct. 2023

Foundation item: Guangdong Major Project of Basic and Applied Basic Research No. 2020B0301030008, Strategic Priority Research Program of Chinese Academy of Sciences under the Grant NO. XDB34030301

Corresponding author: Xurong Chen, E-mail: xchen@impcas.ac.cn

Corresponding author: Qian Wang, E-mail: qianwang@m.scnu.edu.cn